

Теорию переписываем сжато без доказательств. Примеры записываем и разбираем внимательно (подобные будут в экзамене)

Практическое задание делаем полностью и высылаем мне на электронную почту (Nkrotenko2018@list.ru)

Занятие3 (05.02.22)

Логарифмы и их свойства. Натуральный и десятичный логарифмы

Легко решить уравнения $2^x = 4$ и $2^x = 8$. Их корнями будут соответственно числа 2 и 3.

Однако для уравнения $2^x = 5$ сразу указать его корень сложно.

Возникает естественный вопрос: есть ли вообще корни у этого уравнения?

Обратимся к графической интерпретации. На рисунке 19.1 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = 5$. Они пересекаются в некоторой точке $A(x_0; 5)$. Следовательно, уравнение $2^x = 5$ имеет единственный корень x_0 .

Однако графический метод не позволяет определить точное значение x_0 .

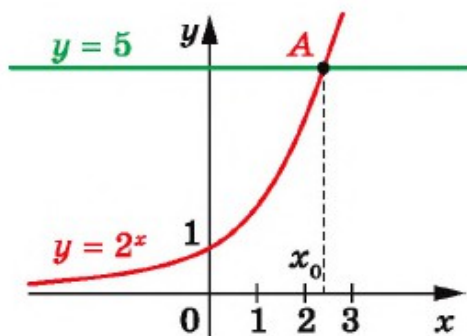


Рис. 19.1

Корень уравнения $2^x = 5$ договорились называть логарифмом числа 5 по основанию 2 и обозначать $\log_2 5$. Таким образом, число $\log_2 5$ — это показатель степени, в которую надо возвести число 2, чтобы получить число 5. Можно записать:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

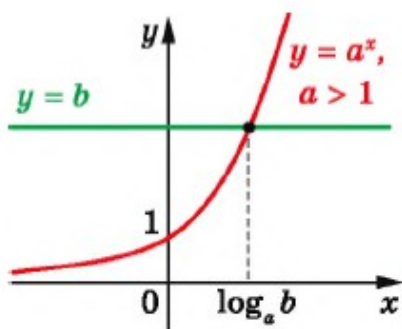


Рис. 19.3

Рассмотрим уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Так как для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $a^x > 0$, то при $b \leq 0$ это уравнение не имеет решений. Если $b > 0$, то это уравнение имеет единственный корень (рис. 19.3). Его называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$.

Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить число b .

Например, $\log_3 9$ — это показатель степени, в которую надо возвести число 3, чтобы получить число 9. Имеем: $\log_3 9 = 2$, поскольку $3^2 = 9$.

Еще несколько примеров:

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ так как } 2^{-3} = \frac{1}{8};$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}, \text{ так как } 25^{\frac{1}{2}} = 5;$$

$$\log_{17} 17 = 1, \text{ так как } 17^1 = 17;$$

$$\log_{100} 1 = 0, \text{ так как } 100^0 = 1.$$

Из определения логарифма следует, что при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$ выполняется равенство

$$a^{\log_a b} = b$$

Его называют **основным логарифмическим тождеством**.

$$\text{Например, } 7^{\log_7 3} = 3, \quad 0,3^{\log_{0,3} 5} = 5.$$

Также из определения логарифма следует, что при $a > 0$ и $a \neq 1$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Рассмотрим равенство $a^c = b$.

Вы знаете, что действие нахождения числа b по данным числам a и c называют возведением числа a в степень c .

Действие нахождения числа c по данным числам a и b , где $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, называют логарифмированием числа b по основанию a . Действительно, $c = \log_a b$.

Отметим, что при $a > 0$ левая часть равенства $a^c = b$ положительна. Следовательно, $b > 0$.

Поэтому при $b \leq 0$ выражение $\log_a b$ не имеет смысла.

Логарифм по основанию 10 называют десятичным логарифмом. Вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$.

Используя это обозначение и основное логарифмическое тождество, для каждого $b > 0$ можно записать: $10^{\lg b} = b$.

Натуральный логарифм

- **Натуральным логарифмом** называется логарифм по основанию e . Он обозначается \ln , т.е. $\log_e a = \ln a$. Число e является иррациональным, его приближённое значение 2.718281828. Значения натуральных логарифмов можно вычислить только приближенно

Свойства логарифмов

$$1. \log_a(1) = 0;$$

$$2. \log_a(a) = 1;$$

$$3. \log_a(b * c) = \log_a(b) + \log_a(c);$$

$$4. \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c);$$

$$5. \log_a(b^m) = m * \log_a(b);$$

$$6. \log_{a^m}(b) = \frac{1}{m} * \log_a(b);$$

$$7. \log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}, ; b > 0; c > 0; c \neq 1;$$

$$8. \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)};$$

$$9. a^{\log_a(b)} = b.$$

Пример 1. Решите уравнение: 1) $3^x = 7$; 2) $0,4^{2x-5} = 9$.

Решение. 1) Из определения логарифма следует, что $x = \log_3 7$.

2) Имеем: $2x - 5 = \log_{0,4} 9$; $2x = \log_{0,4} 9 + 5$; $x = \frac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

Ответ: 1) $\log_3 7$; 2) $\frac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$. ◀

Пример 2. Вычислите значение выражения: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$.

Решение. 1) Применяя свойства степени и основное логарифмическое тождество, получаем:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Имеем: $9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} = (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}$. ◀

Пример 3. При каком значении x выполняется равенство: 1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $\log_x 16 = 4$?

Решение. 1) Выражение $\log_{\frac{1}{2}} x$ определено при $x > 0$. Из определения логарифма следует, что $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = x$, то есть $x = 32$.

2) Выражение $\log_x 16$ определено при $x > 0$ и $x \neq 1$. Согласно определению логарифма имеем: $x^4 = 16$. Учитывая, что $x > 0$, получаем $x = 2$. ◀

Пример 4. Вычислите значение выражения.

1) $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$; 2) $\frac{1}{2} \log_{36} 9 + \frac{1}{3} \log_{36} 8$.

Решение.

1) Применяя свойства логарифма, получаем:

$$\begin{aligned} \log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 &= \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 = \\ &= \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4. \end{aligned}$$

2) Применяя свойства логарифма, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_{36} 9 + \frac{1}{3} \log_{36} 8 &= \frac{1}{2} \log_{36} 3^2 + \frac{1}{3} \log_{36} 2^3 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \log_{36} 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \log_{36} 2 = \log_{36} 3 + \log_{36} 2 = \log_{36} 6 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Практическая часть занятия 3.

№1 Верно ли равенство:

- 1) $\log_7 \frac{1}{49} = -3$;
- 2) $\log_{25} 5 = 2$;
- 3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$;

№2 Найдите логарифм по основанию 2 числа: 1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$;

№3 Решите уравнение

- 1) $\log_7 x = -1$;
- 2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$;
- 3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$;

№4 Найдите значение выражений:

- 1) $\log_6 3 + \log_6 2$;
- 2) $\log_5 100 - \log_5 4$;
- 3) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$;