Срок 09.02.22

Логарифмические уравнения. Основные методы их решения

Учебник Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/449006

Изучить по учебнику § 20

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется **логарифмическим уравнением**.

Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма.

Определение логарифма: Логарифмом числа *b* по основанию *a* называется показатель степени, в которую нужно возвести основание *a*, чтобы получить число *b*. Т. е. $\log_a b = c : a^c = b, a > 0, b > 0, a \neq 1.$

Таким образом, применяя его к нашей теме, мы получим следующее: $\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c,$ при этом $f(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$

Пример 1: $\log_4 x = 2,$

$ОДЗ : x > 0,$

$x = 4^2,$

$x = 16.$

Число 16 удовлетворяет ОДЗ, значит 16 – корень исходного уравнения.

Ответ: 16.

Пример 2: $\log_3(2x + 1) = 2,$

$2x + 1 = 3^2,$

$2x + 1 = 9,$

$x = 4.$

Проверка: $\log_3(2 \cdot 4 + 1) = 2,$ $\log_3 9 = 2,$ $2 = 2$ - верно, значит число 4 – корень исходного уравнения.

Ответ: 4.

Пример 3: $4^{x-3} = 5,$

По определению логарифма $x - 3 = \log_4 5,$ значит $x = 3 + \log_4 5.$

Ответ: $3 + \log_4 5.$

А сейчас мы рассмотрим пример, в котором в основании логарифма уже не число, а выражение, содержащее переменную. Т. е. уравнение будет иметь вид $\log_{g(x)} f(x) = c \Rightarrow f(x) = g(x)^c$, при этом $f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1$. Хочу отметить особо, что рассуждения НЕ ИЗМЕНИЛИСЬ!

<u>Пример 4</u>: $\log_{x+1}(2x^2+1) = 2$,

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2+1>0, \\ x+1>0, \\ x+1\neq 1, \end{cases} \Rightarrow x \in (-1;0)\cup(0;+\infty)$.

$\log_{x+1}(2x^2+1) = 2,$

$2x^2+1 = (x+1)^2,$

$2x^2+1 = x^2+2x+1,$

$x^2-2x=0,$

$x(x-2)=0,$

$x_1 = 0, x_2 = 2.$

С учётом ОДЗ получим, что решением данного уравнения является число 2.

Ответ: 2.

Как мы видим, наличие выражения с переменной в основании влияет лишь на ОДЗ, а не на ход рассуждений. Кроме того, данное уравнение можно решать, не прибегая к нахождению ОДЗ, а просто в конце выполнить проверку.

Метод потенцирования.

Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$, где $a>0, a\neq 1, f(x)>0, g(x)>0.$

<u>Пример 5</u>: $\log_2(x^2+7x-5) = \log_2(4x-1)$,

$x^2+7x-5 = 4x-1,$

$x^2+3x-4=0,$

$x_1 = 1, x_2 = -4.$

Проверка:

$x=1 \Rightarrow \log_2(1^2+7\cdot 1-5) = \log_2(4\cdot 1-1) \Rightarrow \log_2 3 = \log_2 3$ - верно.

$x=-4 \Rightarrow \log_2((-4)^2+7\cdot(-4)-5) = \log_2(4\cdot(-4)-1) \Rightarrow \log_2(-17) = \log_2(-17)$ - не верно.

Значит, только число 1 является решением исходного уравнения.

Ответ:1.

Если же в основании – выражение с переменной, то рассуждения не меняем! В этом случае уравнение будет иметь вид

$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$, где $f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$

Пример 6: $\log_{2+x}(x^2 + 7x - 5) = \log_{2+x}(4x - 1),$

$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$

$x^2 + 3x - 4 = 0,$

$x_1 = 1, x_2 = -4.$

Проверка:

$x = 1 \Rightarrow \log_{2+1}(1^2 + 7\cdot 1 - 5) = \log_{2+1}(4\cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_3 3 = \log_3 3 \Rightarrow$ $1 = 1$- верно.

$x = -4 \Rightarrow \log_{2-4}((-4)^2 + 7\cdot(-4) - 5) = \log_{2-4}(4\cdot(-4) - 1) \Rightarrow \log_{-2}(-17) = \log_{-2}(-17)$ - не верно.

Значит, только число 1 является решением исходного уравнения.

Ответ:1.

ОДЗ для данного уравнения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x^2 + 7x - 5 > 0, \\ 4x - 1 > 0, \\ 2 + x > 0, \\ 2 + x \neq 1. \end{cases}$$

Мы видим, что в этом уравнении рациональнее выполнить проверку, а не искать ОДЗ. Но ещё раз повторюсь, что при решении неравенств ОДЗ находить придётся ОБЯЗАТЕЛЬНО.

Рассмотрим пример, который, на первый взгляд, не может относиться к данному типу уравнений.

Пример7: $\log_4(4 + 7x) = \log_4(1 + 5x) + 1.$

Сделаем замену $1 = \log_4 4^1$, получим $\log_4(4 + 7x) = \log_4(1 + 5x) + \log_4 4,$ воспользовавшись свойством логарифма (сумма логарифмов равна логарифму произведения подлогарифмических выражений: $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$), получим уравнение $\log_4(4 + 7x) = \log_4((1 + 5x)\cdot 4),$ которое в свою очередь замечательно решается методом потенцирования, т.е. $4 + 7x = 4(1 + 5x).$ А это линейное уравнение, решив которое, получим $x = 0.$

Проверка: $\log_4(4 + 7\cdot 0) = \log_4(1 + 5\cdot 0) + 1,$ $\log_4 4 = \log_4 1 + 1,$ $1 = 1$ - верно.

Ответ: 0.

Замечу, что часто перед применением какого-либо метода решений, необходимо преобразовать уравнение, применив различные свойства логарифмов. Предыдущий пример, тому подтверждение.

Метод подстановки.

Данный метод мы достаточно часто встречаем в математике, вспомните тригонометрические или показательные уравнения. Поэтому применение его при решении логарифмических уравнений я вам покажу на примере.

Пример 8: $\log_3^2 x - \log_3 x = 2$.

В этом уравнении рациональней найти ОДЗ: $x > 0$.

Пусть $\log_3 x = t$, тогда уравнение примет вид

$t^2 - t = 2$,

$t^2 - t - 2 = 0$.

$t_1 = -1, t_2 = 2$.

Значит $\log_3 x = -1$ или $\log_3 x = 2$. А это уравнения, которые мы решим, используя определение: 1) $\log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

2) $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2 \Rightarrow x = 9$.

Мы видим, что оба корня удовлетворяют ОДЗ, значит оба числа являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{3}, 9$.

Если в основании логарифма лежит выражение с переменной, то уравнение в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$a \log^2_{g(x)} f(x) + b \log_{g(x)} f(x) + c = 0$,

где $f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1, a, b, c - \text{числа}, a \neq 0$.

И опять, вы сами выбираете: ОДЗ или проверка.

Пример 9: $\log_7 x - \log_x 7 = 2{,}5$.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Приведём логарифмы к одному основанию – 7, пользуясь свойством перехода к новому основанию $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, получим:

$\log_7 x - \frac{1}{\log_7 x} = \frac{5}{2}$, выполним подстановку $t = \log_7 x$, получим уравнение

$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$,

$2t^2 - 5t + 2 = 0$,

$t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$.

Значит,

log_7x=2 log_7x=$\frac{1}{2}$

x=7^2=49 x=$\sqrt{7}$

Оба числа удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\sqrt{7}, 49.$

Метод логарифмирования.

Данный метод является “обратным” методу потенцирования, т. е. мы от уравнения без логарифмов переходим к уравнению, их содержащему.

$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$, при этом $f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$

Этот метод обычно используется, если в уравнении есть показательные функции, логарифмы – в показателе. Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 10: $x^{\log_3 x-4} = \frac{1}{27},$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3:

$\log_3(x^{\log_3 x-4}) = \log_3 \frac{1}{27},$ а теперь воспользуемся свойством логарифмов $\log_c a^p = p\log_c a$, получим

$(\log_3 x - 4)\log_3 x = -3.$

Выполним подстановку $t = \log_3 x$, получим уравнение

$(t-4)t = -3,$

$t^2 - 4t + 3 = 0,$

$t_1 = 1, t_2 = 3.$

Значит,

log_3x=1 log_3x=3

X=3 x=27

Оба числа удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: 3, 27.

Задачи для самостоятельного решения

$\log_3(9 + x) = 4$

$\log_3(14 - x) = \log_3 5$

$\log_3(x + 4) = \log_3(2x - 12)$

$\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$

$\log_8 2^{6x-3} = 4$