Срок сдачи 1.02.22г.

Производные и дифференциалы высших порядков.
Раскрытие неопределенностей по правилам Лопиталя.

Производные и дифференциалы высших порядков.
(Записать в тетрадь определения и примеры).

Пусть функция $f(x)$ – дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x)$$

Если найти производную от функции $f'(x)$, получим *вторую производную* функции $f(x)$.

$$y'' = f''(x)$$

$$\text{т.е. } y'' = (y')'$$

Продолжая эту операцию, можно получить производные третьего, четвертого и более высоких порядков. При этом f'(x) будем называть производной первого порядка.

Определение Производной n-го порядка (или n-й производной) от функции f(x) называется производная (первого порядка) от ее (n-1)-й производной. Обозначение: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=f^{(n)}(x)$.

Пример:
Найти производную 3-го порядка от функции $y=x^3-5x^2+3x+12$.
Решение:
$y'=3x^2-10x+3$,
$y''=(y')'=6x-10$,
$y'''=(y'')'=6$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Дифференциалом порядка n или n-ым дифференциалом, $n \geq 2$ от функции $y = y(x)$ называется первый дифференциал от дифференциала порядка $n-1$, то есть:

$$d^n y = d(d^{\,n-1} y)$$

Например, для функции, зависящей от одной переменной $y = y(x)$, второй и третий дифференциалы находятся по формулам:

$$d^2 y = y''(x) dx^2$$

$$d^3 y = y'''(x) dx^3$$

При вычислении дифференциалов высших порядков очень важно запомнить, что величина dx не зависит от x, то есть относительно переменной дифференцирования является константой, поэтому при дифференцировании по x величину dx следует рассматривать как постоянный множитель.

Пример:

Найти дифференциал второго порядка функции $y(x)= 3x^3$

Решение Согласно определению, искомый дифференциал равен:

$$d^2y = y''(x)dx^2$$

Найдем второую производную заданной функции:

$$y'(x) = (3x^3)' = 3 \cdot 3x^2 = 9x^2 \Rightarrow y''(x) = (y'(x))' = (9x^2)' = 18x$$

Тогда, искомый дифференциал

$$d^2y = 18xdx^2$$

Ответ $d^2y = 18xdx^2$

Пример:

Задание Найти дифференциал d^3y функции $y(x) = \sin x$

Решение Искомый дифференциал найдем по формуле:

$$d^3y = y'''(x)dx^3$$

Третья производная заданной функции:

$$y'(x) = (\sin x)' = \cos x$$

$$y''(x) = (y'(x))' = (\cos x)' = -\sin x$$

$$y'''(x) = (y''(x))' = (-\sin x)' = -\cos x$$

Тогда

$$d^3y = -\cos x dx^3$$

Ответ $d^3y = -\cos x dx^3$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти производные второго порядка:

1) $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x$;

2) $y = (2x+5)^3$;

3) $y = \dfrac{1}{x-1}$;

4) $y = -\dfrac{22}{x+5}$;

2. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции y= e^x.
3. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функций:

1) $y = 2x^3 + 5x^2$;

2) sin(2x);

3) $y = x \cdot (\ln x - 1)$.

Записать в тетрадь правило Лопитала и примеры решения задач

Правило Лопиталя.

Пусть функции $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при $x \to x_0$ (x_0 — заданное число) или при $x \to \infty$. Если при этом отношение производных $f'(x)/\varphi'(x)$ имеет предел, то отношение функций также имеет предел, равный пределу отношения производных, т.е

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Замечание. Может оказаться, что функции $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ одновременно стремятся к нулю или к бесконечности при $x \to x_0$ или $x \to \infty$.

Тогда к пределу отношения производных вновь можем применить правило Лопиталя,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Примеры с решением

Пример 1:

Требуется найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Поскольку $\cos x \to 1$ при $x \to 0$, то согласно правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$, если существует последний предел.

Здесь снова и числитель, и знаменатель стремятся к нулю при $x \to 0$, поэтому для нахождения последнего предела снова можем воспользоваться правилом Лопиталя. Поэтому окончательно $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

и $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Если предел отношения производных $\lim\limits_{x\to x_0} [f'(x)/\varphi'(x)]$ не существует, то правило Лопиталя неприменимо. Сказанное покажем на примере.

Рассмотрим предел отношения функций

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}.$$

Возьмем предел отношения производных этих функций

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} (1+\cos x),$$

но этот предел не существует, так как при неограниченном изменении угла x, измеренного в радианах, функция $\cos x$ принимает значения, заключенные между -1 и 1, следовательно, $1+\cos x$ ни к какому пределу не стремится.

Однако предел отношения функций существует. Убедимся в этом.

Предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}.$ запишем так: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

Согласно теореме о пределе суммы он равняется сумме пределов, а предел постоянной равен ей самой. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\cdot\sin x\right).$

Здесь второй предел равен нулю, так как $1/x \to 0,$ т.е. является

бесконечно малой функцией при $x\to\infty,$ а $\sin x$ является ограниченной функцией при $x\to\infty$, так как $|\sin x| \leqslant 1.$

Но произведение бесконечно малой функции и ограниченной функции есть снова бесконечно малая функция. Итак, предел в правой части последней формулы равен нулю, и мы получили $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1.$

Таким образом, предел отношения функций существует и равен $1,$ в то время как предел отношения их производных не существует.

Пример 2:

Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{2x^3-x-1}.$

Применяя формулу (2), получаем

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{2x^3-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{5x^4}{6x^2-1} = 1.$$

Пример 3:

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Раскрывая неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1/(1+x^2)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}.$$

Пример 4:

Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Раскрывая неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Иногда при вычислении пределов правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

Пример 5:

Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}$.

Применяя правило Лопиталя, снова получаем неопределенность $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{10x^9-10}{5x^4-5}.$$

Пользуясь еще раз правилом Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 1}\frac{10x^9-10}{5x^4-5}=2\lim_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x^4-1}=2\lim_{x\to 1}\frac{9x^8}{4x^3}=\frac{9}{2}.$$

Следовательно, искомый предел равен 9/2

Задания для самостоятельной работы

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-6x+5}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$.

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$.