

*Уважаемые студенты!*

*Вашему вниманию предоставляется методический материал, который поможет вам при самостоятельном изучении данных тем.*

*1. Внимательно изучите каждую тему, выполните указанные задания. Сфотографируйте выполненные задания и перешлите по указанным ниже контактам в указанный срок.*

*2. Выпишите все вопросы, которые не удалось разобрать самостоятельно. По всем возникшим вопросам Вы можете обратиться по контактам, указанным ниже:*

*Электронная почта: [br-mar@mail.ru](mailto:br-mar@mail.ru)*

*ВКонтакте: <https://vk.com/id176186294>*

*Желаю удачи!*

**Срок сдачи 29.01.22г.**

### **РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ.**

Производная успешно применяется в физике, химии, биологии, экономике, помогают увидеть силу межпредметных связей, важную роль математики, дающей мощный аппарат для решения многих задач, которые выдвигаются и успешно решаются в различных областях науки и практики.

#### **Задача о силе электрического тока.**

Пусть  $q=q(t)$ -количество электричества (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника за время  $t$ ; количество электричества есть функция времени. Для определения скорости изменения количества электричества с течением времени пользуются понятием силы тока. Обозначим  $\Delta q$  количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени  $\Delta t$  от момента  $t$  до момента  $t+\Delta t$ .

Отношение  $\frac{\Delta q}{\Delta t}$  называется средней силой тока за время от  $t$  до  $t+\Delta t$  и обозначается  $J_{cp}$ . В случае постоянного тока  $J_{cp}$  будет постоянной. Если в цепи переменный ток, то  $J_{cp}$  будет различна для различных промежутков времени.

Поэтому для цепи переменного тока вводят понятие силы тока  $J$  в данный момент времени  $t$ , определив ее как предел средней силы тока за промежуток времени от  $t$  до  $t+\Delta t$ , если  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$$J = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}, \text{ т.е.}$$

$$\mathbf{J(t)=q'(t).}$$

#### **Задача о скорости химической реакции.**

Пусть дана функция  $m=m(t)$ , где  $m$  - количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени  $t$ . Приращению времени  $\Delta t$  будет соответствовать приращение  $\Delta m$  величины  $m$ . Отношение  $\frac{\Delta m}{\Delta t}$  -средняя скорость химической реакции за

промежуток времени  $\Delta t$ . Предел этого отношения при стремлении  $\Delta t$  к нулю, т.е.  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$  есть

скорость химической реакции в данный момент времени  $t$ ,  $V=m'(t)$ .

### Задача о скорости и ускорении движущейся точки

Пусть материальная точка движется по прямой под действием некоторых сил, не меняя направления своего движения, и пусть  $S(t)$  - расстояние, пройденное точкой от некоторого момента времени, который принят за нулевой, до момента  $t$ . Выберем какой-либо момент времени  $t_0$  и рассмотрим промежуток времени  $\Delta t$  от момента  $t_0$  до момента  $t = t_0 + \Delta t$ . За этот промежуток времени точка пройдет некоторый путь, который обозначим  $\Delta S(t_0)$ . Этот путь есть функция  $\Delta t$ . По известному из физики определению отношение  $\Delta S(t_0)/\Delta t$  есть средняя скорость движения точки за время  $\Delta t$ . Будем рассматривать все меньшие и меньшие промежутки  $\Delta t$ , устремляя  $\Delta t$  к нулю.

**Предел**  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0) = v(t_0)$  называется **мгновенной скоростью точки в момент времени  $t_0$** .

$$v(t_0) = S'(t_0)$$

Ускорение произвольного движения определяется как скорость изменения скорости, т. е. как производная скорости по времени:  $a = v' = \dot{v}$ .

Так как скорость есть производная пути, а ускорение есть производная скорости, то ускорение называют второй производной пути и обозначают так:  $a = S''$

Через координату точки (координата точки - расстояние, пройденное точкой от некоторого момента времени, который принят за нулевой, до момента  $t$ .  $S=x$ )

$x = x(t)$  и ее производные можно выразить другие механические величины:

сила  $F=ma$  ( $m$  — масса),

импульс  $P=mv$

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

кинетическая энергия

### Примеры.

1. Если популяция в момент времени  $t$  насчитывает  $p(t)=3000+100t^2$  особей ( $t$  измеряется в часах), то скорость роста популяции есть  $p'(t)=200t$ .

Скорость роста популяции увеличивается со временем.

Если  $t=5$ , то скорость роста составляет  $p'(5)=200 \cdot 5=1000$  особей в час.

Если  $t=10$ , то  $p'(10)=200 \cdot 10=2000$  особей в час.

2. Материальная точка движется вдоль оси  $Ox$  согласно закону  $x(t)$ . Найти скорость и ускорение движения в начальный момент времени.

а).  $x(t) = \frac{3}{4} - 8t + \frac{5}{6}t^2$

$v(t) = x'(t) = -8 + \frac{5}{3}t; v(0) = -8$  (м/с)

$$a(t) = V'(t) = \frac{5}{3} \quad a = \frac{5}{3} \text{ (м/с}^2\text{)}$$

$$\text{б). } x(t) = \sqrt{3} + 5t + \frac{1}{2}t^2$$

$$V(t) = x'(t) = 5 + t; \quad V(0) = 5 \text{ (м/с)}$$

$$a(t) = V'(t) = 1; \quad a = 1 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

3. Материальная точка движется по прямой. Уравнение движения:  $S(t) = t^3 - 3\frac{t^2}{2} + 2t - 1$  (м).

Найдите ее скорость в момент времени  $t=3$  (с). В какой момент времени ускорение будет равно  $9 \text{ м/с}^2$ ?

Решение:

$$\text{а). } V(t) = S'(t) = 3t^2 - 3t + 2;$$

$$V(3) = 27 - 9 + 2 = 20 \text{ (м/с).}$$

$$\text{б). } a(t) = V'(t) = 6t - 3;$$

$$6t - 3 = 9; \quad 6t = 12; \quad t = 2 \text{ (с).}$$

Ответ:  $V(3) = 20 \text{ м/с}$ ;  $a = 9 \text{ м/с}^2$  в момент времени  $t = 2 \text{ с}$ .

4. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону  $\varphi(t)$ . Найти угловую скорость если  $\varphi(t) = 12t + 4$

Решение:

$$\varphi(t) = 12t + 4$$

$$\omega(t) = \varphi'(t) = 12 \text{ (рад/с)}$$

5. Тело массой  $5 \text{ кг}$  движется прямолинейно по закону  $S(t) = (5-t)(2t-6) + 50$ . Найти кинетическую энергию тела через  $2 \text{ с}$  после начала движения.

$$\text{Решение: } E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$V(t) = S'(t) = -(2t-6) + 2(5-t) = -2t + 6 + 10 - 2t = -4t + 16$$

$$V(t_0) = -4 \cdot 2 + 16 = -8 + 16 = 8 \text{ (м/с)}$$

$$E_k = \frac{5 \cdot 64}{2} = 5 \cdot 32 = 160 \text{ (Дж)}$$

Ответ:  $E_k = 160 \text{ Дж}$ .

### Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти скорость и ускорение материальной точки в момент времени  $t=t_0$ , движущейся прямолинейно по закону  $S(t)$ , где  $t$  измеряется в секундах, а  $S$  – в метрах, если:

$$\text{а). } S(t) = 5t^2; \quad t_0 = 10$$

$$\text{б). } S(t) = 5t^2 - 2t; \quad t_0 = 5$$

2. Материальная точка массой  $m$  движется прямолинейно по закону  $S(t)$ , где  $t$  измеряется в секундах, а  $S$  – в метрах. Найдите скорость и силу  $F=ma$ , действующую на эту точку в момент времени  $t$ , если:

$$\text{а). } S(t) = t^3 - \frac{3t^2}{2} + 2t - 1; \quad t = 3 \text{ с}; \quad m = 2 \text{ кг}$$

$$\text{б). } S(t) = (6-t)(2t+3) - 18; \quad t = 2 \text{ с}; \quad m = 5 \text{ кг}$$

3. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону  $\varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  измеряется в радианах, а  $t$  – в секундах. Найти угловую скорость если

$$\text{а). } \varphi(t) = 0,3t^2 - 0,5t + 0,2; \quad t = 10$$

$$\text{б). } \varphi(t) = 4t - 0,3t^2; \quad t = 2$$

4. Тело массой 6 кг движется прямолинейно по закону  $S=3t^2+2t-5$ . Найти кинетическую энергию тела ( $E = \frac{mv^2}{2}$ ) через 3 с после начала движения.