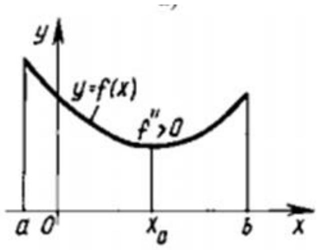
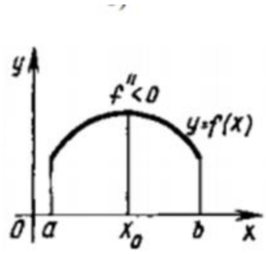
**Срок сдачи 7.02.22.**

## Выпуклость и точки перегиба графика функции.

График функции $f(x)$ называется ***выпуклым*** на интервале $(a;\ b)$, если он расположен ниже касательной, проведенной к любой его точке.

График функции $f(x)$ называется ***вогнутым*** на интервале $(a;\ b)$, если он расположен выше касательной, проведенной к любой его точке.

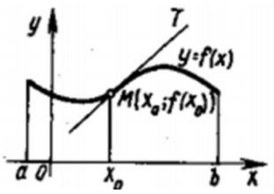



**Теорема (достаточное условие выпуклости, вогнутости графика функции):**

Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;\ b)$ вторую производную $f''(x)$ и она положительна, то функция вогнута на этом интервале.

Если же $f''(x)$ отрицательна на интервале $(a;\ b)$, то функция выпукла на этом интервале.




Точка графика функции $M(x_0; f(x_0))$, при переходе через которую кривая меняет направление выпуклости, называется ***точкой перегиба***.

**Теорема (достаточное условие существования точки перегиба):**

Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;\ b)$ вторую производную $f''(x)$ и при переходе через точку $x = a,$ $f(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой

$x = a,$ является точкой перегиба.

**Алгоритм нахождения интервалов выпуклости и точек перегиба графика функции:**

1° Находят вторую производную функции и точки, в которых она равна нулю или не существует.

2° Решить уравнение $f''(x) = 0$.

Определяют интервалы, на которые область определения функции разбивается найденными точками (корнями уравнения).

3° Устанавливают знаки второй производной в каждом из указанных интервалов. Если $f''(x) < 0$, то в рассматриваемом интервале кривая выпукла;

если $f''(x) > 0$, то в рассматриваемом интервале кривая  вогнута.

Если вторая производная $f''(x)$ и при переходе через полученные точки меняет знак, то точка кривой является точкой перегиба.

**Пример 1**

Исследовать функции на выпуклость, вогнутость. Найти точки перегиба.

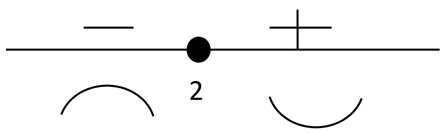
$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$

1° Найдем вторую производную: $y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12; \ 6x - 12 = 0, \ x = 2.$

2° Точка $x = 2$ делит область определения функции на два промежутка $-\infty < x < 2$ и $2 < x < \infty$.

3° $y''$




y(2)=-1

Таким образом, получим точку перегиба (2;-1).

Ответ: y(2)=-1

**Пример 2**

Найдите промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции $y = \dfrac{x^2 + 5}{x - 7}$.

*Решение.*

1. Данная функция определена в том случае, когда знаменатель отличен от нуля: $x$-7≠0 $\Rightarrow x \neq 7$.

Найдем первую производную функции:

$$y' = \frac{(x^2+5)'\cdot(x-7)-(x-7)'\cdot(x^2+5)}{(x-7)^2} = \frac{2x\cdot(x-7)-(x^2+5)}{(x-7)^2}$$

$$= \frac{2x^2-14x-x^2-5}{(x-7)^2} =$$

$$= \frac{x^2-14x-5}{(x-7)^2}.$$

Найдем вторую производную функции: $y'' = \left(\frac{x^2-14x-5}{(x-7)^2}\right)' =$

$$= \frac{(x^2-14x-5)'\cdot(x-7)^2-((x-7)^2)'\cdot(x^2-14x-5)}{((x-7)^2)^2} =$$

$$= \frac{(2x-14)\cdot(x-7)^2-2(x-7)\cdot(x^2-14x-5)}{(x-7)^4}.$$

Вынесем в числителе $2\cdot(x-7)$ за скобки:

$$y'' = \frac{2(x-7)\cdot((x-7)\cdot(x-7)-(x^2-14x-5))}{(x-7)^4} = 2\cdot\frac{(x-7)^2-(x^2-14x-5)}{(x-7)^3} =$$

$$= 2\cdot\frac{x^2-14x+49-x^2+14x+5}{(x-7)^3} = 2\cdot\frac{54}{(x-7)^3} = \frac{108}{(x-7)^3}.$$

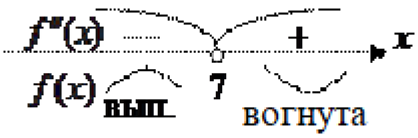
2. $y''$ не может быть равна нулю, поскольку числитель дроби $108\neq0$.

$y''$ не существует, если $(x-7)^3=0 \Rightarrow x=7$ - критическая точка второго рода.

3. На числовой оси отметим критическую точку $x=7$ выколотой точкой, поскольку в этой точке функция $y=\frac{x^2+5}{x-7}$ не определена. Эта точка разбивает область определения функции на два интервала $(-\infty;7)$ и $(7;+\infty)$. Расставим знаки второй производной функции $y''=\frac{108}{(x-7)^3}$ на каждом из полученных интервалов:

при $x=6\in(-\infty;7)$ $y''(6)=\frac{108}{(6-7)^3}<0$;

при $x$=8 ∈ (7;+∞) $y''$ (8)= $\frac{108}{(8-7)^3}$ >0.




Согласно критерию выпуклости-вогнутости график функции $y=\frac{x^2+5}{x-7}$ является выпуклым при $x$ ∈ (-∞;7), вогнутым при $x$ ∈ (7;+ ∞).

Точка с абсциссой $x$=7 не может быть точкой перегиба, т.к. в этой точке функция не существует (терпит разрыв).

*Ответ*: график функции $y=\frac{x^2+5}{x-7}$ выпуклый при $x$ ∈ (-∞;7), вогнутый при $x$ ∈ (7;+ ∞).

**Письменно ответить на вопросы:**

1. Какая кривая называется выпуклой (вогнутой);
2. Как определяются геометрически выпуклость и вогнутость кривой?
3. Понятия: точка перегиба.
4. Алгоритм нахождения интервалов выпуклости и точек перегибы графика функции.

**Найти интервалы выпуклости и точки перегиба:**

**1.** $y=x^3-48x+17$

**2.** $y=\frac{x^4}{4}-4x^3+18x^2$

**3.** $y=\frac{x+4}{x-3}$

**4.** $y=\frac{x^2-4}{x}$