Срок сдачи 09.02.22г.

Асимптоты графика функции.

Одним из важных этапов построения графиков функций является поиск асимптот. С асимптотами мы встречались неоднократно: при построении графиков функций $y=\frac{1}{x}$, *y=tgx*, *y=ctgx*. Мы определяли их как линии, к которым «стремится» график функции, но никогда их не пересечет.

Определение. Асимптотой графика функции называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки графика функции до этой прямой стремиться к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Асимптоты бывают **горизонтальные, вертикальные и наклонные**.

Вертикальные асимптоты (рис. 1 а), горизонтальные асимптоты (рис. 1 б), наклонные асимптоты (рис. 1 в).

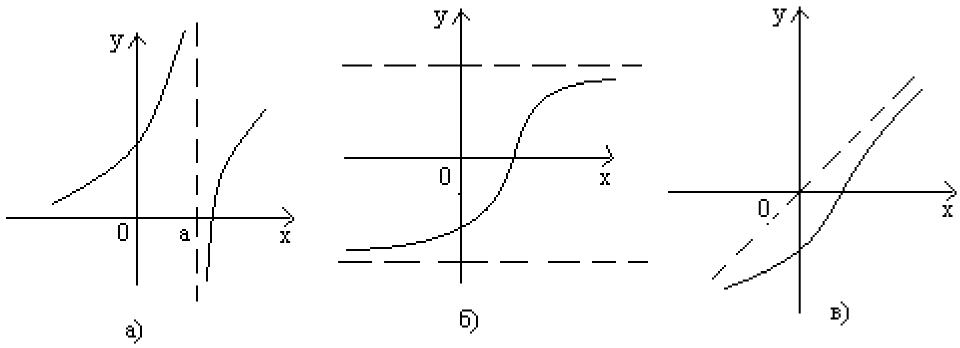


Рис. 1

Асимптота – это **прямая**, к которой *бесконечно близко* приближается график функции.

Виды асимптот.

Вертикальные асимптоты.

Определение. Прямая $x=x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если выполнено одно из условий:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\pm\infty$$

Вертикальные асимптоты, уравнение которых *x=x₀*, следует искать в точках, где функция терпит разрыв второго рода, или на концах ее области определения, если концы не равны $\pm\infty$. Если таких точек нет, то нет и вертикальных асимптот.

Например, для кривой $y=\frac{2}{x-5}$, вертикальной асимптотой будет прямая x=5, так как $\lim\limits_{x\to 5-0}\frac{2}{x-5}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 5+0}\frac{2}{x-5}=+\infty$.

Замечание. Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x = x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Вертикальная асимптота x=5.

Горизонтальные асимптоты

Определение. Если при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) функция $f(x)$ имеет конечный предел, равный числу b:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b, \text{ или } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

то прямая $y=b$ есть горизонтальная асимптота графика функции $y=f(x)$.

Например, для функции $y=arctgx$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty} arctg\, x=\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} arctg\, x=-\frac{\pi}{2}.$$

Соответственно, прямая $y=\frac{\pi}{2}$ – горизонтальная асимптота для правой ветви графика функции $y=arctgx$, а прямая $y=-\frac{\pi}{2}$ – для левой ветви.

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

В том случае, если

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty, \text{ или } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

график функции не имеет горизонтальных асимптот, но может иметь наклонные.

Наклонные асимптоты

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если выполняется равенство

.

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$$

Нахождение наклонной асимптоты.

Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ при $x \to \infty$.

Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при $k = 0$.

Решение типовых заданий:

Пример№1.

Найти асимптоты графика функции $y(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

Решение.

Область определения функции:

$D[f] : x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

а) вертикальные асимптоты: прямая $x = -1$ - вертикальная асимптота, так как

$$\lim_{x\to -1} y(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}\left[\frac{6}{0}\right] = \infty$$

б) горизонтальные асимптоты: находим предел функции на бесконечности:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \infty$ то есть, горизонтальных асимптот нет.

в) наклонные асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 3x + 2}{x(x + 1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[y(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 3x + 2 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-4x + 2}{x + 1} = -4$$

Таким образом, наклонная асимптота: $y = x - 4$.

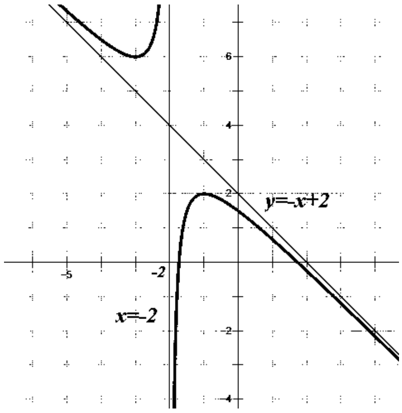
Ответ. Вертикальная асимптота - прямая $x = -1$.Наклонная асимптота - прямая $y = x - 4$.

Пример№2.

Найдем асимптоты графика функции $y=\frac{3-x^2}{x+2}$

Решение.

а) Начнем с области определения функции. Функция не определена в точке $x=-2$, следовательно прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой.



б) горизонтальные асимптоты: находим предел функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^2}{x+2}=\infty$$

Следовательно, график функции $y=\frac{3-x^2}{x+2}$ не имеет горизонтальной асимптоты.

в) найдем наклонную асимптоту.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^2}{\left(x+2\right)x}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-x^2}{x+2}-\left(-1\right)x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3-x^2+x^2+2x}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+2x}{x+2}=2$$

Итак, уравнение наклонной асимптоты: $y=-x+2$

Пример№3.

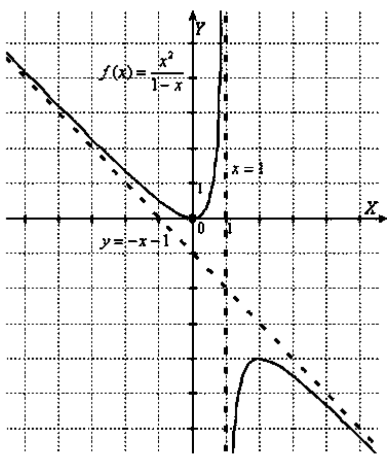
Найти асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{x^2}{1-x}$$

Решение:

комментировать особо нечего, поэтому оформлю примерный образец чистового решения:

а) Вертикальные асимптоты. Исследуем точку $x=1$.



$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{1-(1-0)}=\frac{1}{1-1+0}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{1-(1+0)}=\frac{1}{1-1-0}=\frac{1}{-0}=-\infty$$

Прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой для графика $f(x)$ при $x\to1$.

б) Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(1-x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{1-x}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}^{\to 0}-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}-(-1)\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-x^2}{1-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x}=-1$$

Прямая $y=-x-1$ является наклонной асимптотой для графика $f(x)$ при $x\to\pm\infty$.

Ответ: $x=1,\quad y=-x-1$.

Пример№4.

Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{1}{1-3x}$.

Решение*:*

а) Вертикальные асимптоты. Функция терпит бесконечный разрыв в точке $x=\frac{1}{3}$. Найдём односторонние пределы:

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}-0}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}-0}\frac{1}{1-3x}=\frac{1}{1-3\cdot\left(\frac{1}{3}-0\right)}=\frac{1}{1-1+0}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}+0}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}+0}\frac{1}{1-3x}=\frac{1}{1-3\cdot\left(\frac{1}{3}+0\right)}=\frac{1}{1-1-0}=\frac{1}{-0}=-\infty$$

Прямая $x=\frac{1}{3}$ является вертикальной асимптотой графика функции при $x\to\frac{1}{3}$.

б) Наклонные асимптоты.

к=0, b=0

Прямая $y=0$ (ось абсцисс) является горизонтальной асимптотой графика функции при $x\to\pm\infty$.

Ответ: $x=\frac{1}{3},\quad y=0$

Задание для самостоятельного выполнения:

1. Дайте определение асимптоты графика функции, назовите виды асимптот (ПИСЬМЕННО).

2. Найти асимптоты графика функции

1. $y(x)=\dfrac{1}{2x-1}$,

2. $y(x)=\dfrac{4x}{2x+3}$,

3. $y(x)=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$,

4. $y(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 + 3}$