Занятие2 - лекция

Теорию переписываем сжато, но понятно. Примеры записываем и разбираем внимательно. (готовимся к самотоятельной работе по теме « Приближенные решения уравнений»)

№8 (2ч)

Уточнение корня методом касательных

Метод касательных. Пусть некторый корень ξ уравнения ***f(x) = 0*** определен на отрезке ***[a;b]***. Пусть функция ***f(x)*** непрерывна, монотонна, имеет выпуклость одного знака и и принимает на концах значения разных знаков, т. е. корень отделен на отрезке ***[a;b]***.
Корень уравнения ***f(x) = 0*** можно приблизить абсциссами ξ_1 , ξ_2 и т. д. точек пресечения касательных к кривой с осью ***Ox*** (рис. 2.12)
Чтобы определить точку графика функции, в которой надо проводить касательную, проследим поведение знака второй производной *f ''(x)* при различном поведении графика функции на заданном числовом множестве.

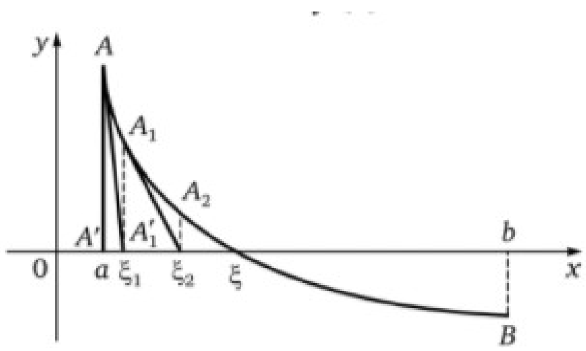


Рис. 2.12. **К методу касательных**

Глоссарий

График ф-ции f (x) называется выпуклым (вниз), если он проходит под хордой, соединяющей какие-либо две точки этого графика.

График ф-ции f (x) называется вогнутым (вверх), если он проходит над хордой, соединяющей какие-либо две точки этого графика.

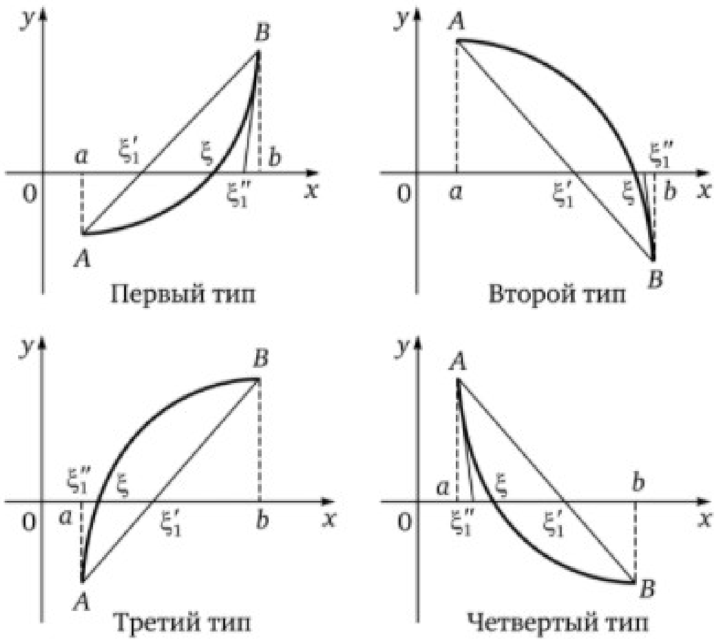
Теорема

Пусть ф-ция f (x) определена и непрерывна вместе со своей производной f '(x) на отрезке [a; b] и имеет внутри него вторую производную f ''(x).

- Для выпуклости (вниз) ф-ции f (x) на [a; b] необходимо и достаточно, чтобы внутри [a; b] выполнялось $f''(x) \geq 0$.

- Для вогнутости (вверх) ф-ции f (x) на [a; b] необходимо и достаточно, чтобы внутри [a; b] выполнялось $f''(x) \leq 0$.

Рассмотрим различные варианты поведения ф-ции



Первый тип ф-ции:

Функция *f (x)* — возрастает, *f ''(x) > 0. Касательную нужно проводить в точке z = b, где f (b)> 0*

Второй тип ф-ции:

Функция *f (x)* — убывает, *f ''(x) < 0. Касательную нужно проводить в точке z = b , где f (b)< 0*

Третий тип ф-ции:

Функция *f (x)* — возрастает, *f ''(x) < 0. Касательную нужно проводить в точке z = a , где f (a)< 0*

Четвертый тип ф-ции:

Функция *f (x)* — убывает, *f ''(x) > 0. Касательную нужно проводить в точке z = a, где f (a)> 0*

Т.о., касательную к графику ф-ции необходимо проводить в точке ***z***, где знаки ф-ции *f (z)* и второй производной *f ''(z) совпадают.*

Чтобы найти уточненное значение корня, запишем уравнение касательной в точке ***x = z****:*

$$y - f(z) = f'(z)(x - z)$$

Отсюда, полагая ***y = 0*** и ***x = ξ***, имеем $\xi = z - \dfrac{f(z)}{f'(z)}$

Сравнением знаков функции в точках a, ξ, b находят утоненный нтервал, содержащий корень заданного уравнения.

Вычисления заканчиваются, когда разность между предыдующим и текущим значением корня не превзойдет заданной погрешности, т.е.

$$|\xi_n - \xi_{n-1}| \le \varepsilon$$

Пример

Методом касательных найти значение корня уравнения $\boldsymbol{2x^2 + 5x - 10 = 0}$ на отрезке ***[1; 2]*** с точностью $\boldsymbol{\varepsilon = 0,01}$

Решение:

Находим $f'(x) = 4x+5;\ f''(x) = 4 > 0$

$f(1) = -3 < 0$

$f(2) = 8 > 0$

Следовательно касательную нужно проводить в т. Z = 2

Находим $\xi = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{8}{13} \approx 1,3846$

$f(1) = -3 < 0$

$\underline{f(1,3846) = 0,7574 > 0}$

$f(2) = 8 > 0$

Новый промежуток [1; 1,3846]

Т.о. касательная проходит через z = 1,3846

Находим $\xi = 1,3846 - \frac{0,0108}{10,2510} \approx 1,3127$

Т.к. $|\ 1,3127 - 1,3846\ | = 0,0718 > 0,01 = \varepsilon$, то продолжим вычисления в т. $\xi = 1,3127$

$f(1) = -3 < 0$

$\underline{f(1,3127) = 0,0103 > 0}$

$f(1,3846) = 0,7574 > 0$

Т.о. касательная порйдет через z = 1,3127

Находим $\xi =$ $\xi = 1,3127 - \frac{0,0103}{10,2508} \approx 1,3117$

Т.к. $|\ 1,3117 - 1,3127\ | = 0,001 < 0,01$, то окончательно корень запишем $x = \xi = 1,3117$

Ответ: 1,3117